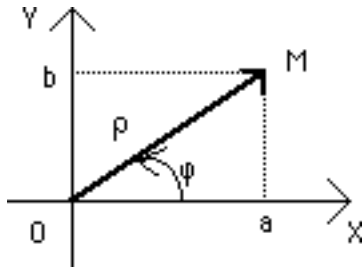


A11. Représentation des tensions et des courants sinusoïdaux

Vecteurs et nombres complexes



$$\vec{OM} = [\rho ; \varphi]$$

$$\underline{z} = \begin{cases} [\rho ; \varphi] & \text{coordonnées polaires} \\ a + jb & \text{coordonnées rectangulaires} \end{cases}$$

	Vecteurs	Nombres complexes
longueur	$ \vec{OM} = \rho$	$ \underline{z} = \rho$ module
angle	$(\vec{OX}, \vec{OM}) = \varphi$	$\text{Arg}(\underline{z}) = \varphi$ argument
abscisse de M	$\text{Proj}(\vec{OM})_{OX} = a$	$\text{Re}(\underline{z}) = a$ partie réelle
ordonnée de M	$\text{Proj}(\vec{OM})_{OY} = b$	$\text{Im}(\underline{z}) = b$ partie imaginaire
		$\underline{z} = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi) = \rho e^{j\varphi}$ formule d'Euler

Transformations de coordonnées

Polaires $\rightarrow$ Rectangulaires :

Rectangulaires $\rightarrow$ Polaires :

$$\begin{cases} a = \rho \cos \varphi \\ b = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = \arctan \frac{b}{a} \quad \text{si } a > 0 \\ \varphi = \arctan \frac{b}{a} + \pi \quad \text{si } a < 0 \end{cases} \quad \text{!}$$

NB1 : nombres complexes remarquables :

$$e^{j\pi} = -1 \quad \text{car : } \cos \pi + j \sin \pi = -1$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j \quad \text{car : } \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j$$

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \quad \text{car : } \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -j$$

$$\text{ou : } e^{j\frac{\pi}{2}} = (e^{j\pi})^{1/2} = \sqrt{e^{j\pi}} = \sqrt{-1} = j$$

$$\text{ou : } e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{j} = -j$$

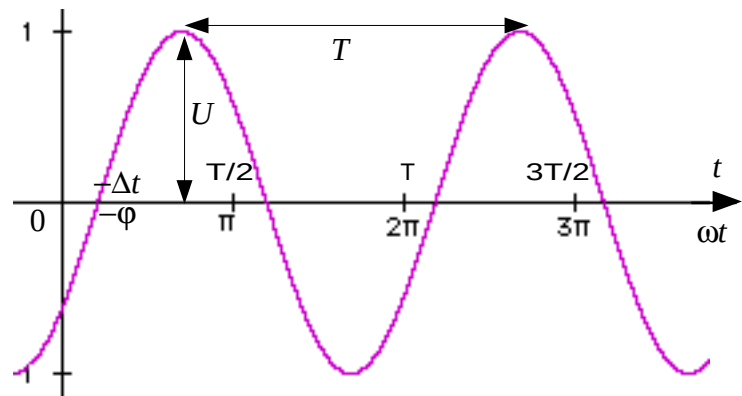
NB2 : produit de nombres complexes

$$\underline{V} = \underline{T} \cdot \underline{U} \Leftrightarrow \begin{cases} |\underline{V}| = |\underline{T}| |\underline{U}| & \text{ou, plus simplement : } V = T \cdot U \\ \text{Arg}(\underline{V}) = \text{Arg}(\underline{T}) + \text{Arg}(\underline{U}) & \text{ou : } \varphi_V = \varphi_T + \varphi_U \end{cases}$$

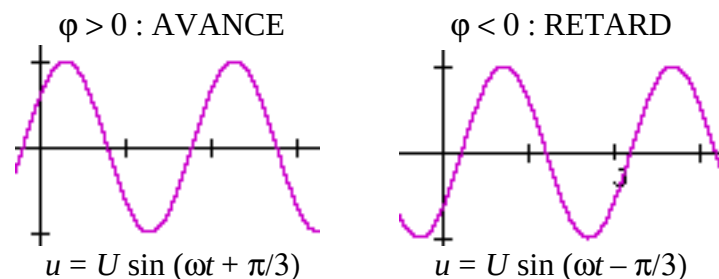
Tensions et courants sinusoïdaux ("régime harmonique")

- **Représentation analytique** : $u(t) = U \sin(\omega t + \varphi) = U \sin[\omega(t + \Delta t)]$:

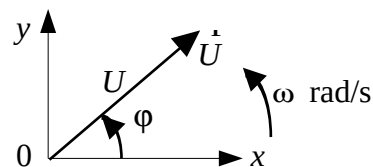
U : amplitude (V)
 T : période (s)
 f : fréquence (Hz)
 $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$: pulsation (rad/s)
 φ : phase (° ou rad)
 $\Delta t = \frac{\varphi}{\omega}$: décalage horaire (s)



NB :



- **Représentation de Fresnel** :



- **Représentation complexe** :

$$\underline{u}(t) = U e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{U} e^{j\omega t}$$

avec $\underline{U} = U e^{j\varphi} = [U ; \varphi]$: amplitude complexe
(quantité indépendante du temps)

- **Remarques à propos des représentations de Fresnel et complexe** :

1°) La représentation complexe est plus puissante que la représentation vectorielle, puisqu'elle permet de représenter la grandeur sinusoïdale $u(t)$ à tout instant, et non seulement à l'instant origine. La partie indépendante du temps, ou *amplitude complexe*, correspond au vecteur de Fresnel $\dot{\underline{U}}$, qui est dessiné à l'instant $t = 0$.

⇒ la représentation de Fresnel est une photo, la représentation complexe une vidéo !

2°) Par rapport à la représentation analytique, vecteurs et nombres complexes présentent une ambiguïté, puisqu'ils peuvent représenter aussi bien la fonction :

$$U \sin(\omega t + \varphi) = \text{Proj}(\dot{\underline{U}})_{OY} = \text{Im}(\underline{u}) \quad \text{représentation européenne}$$

que la fonction :

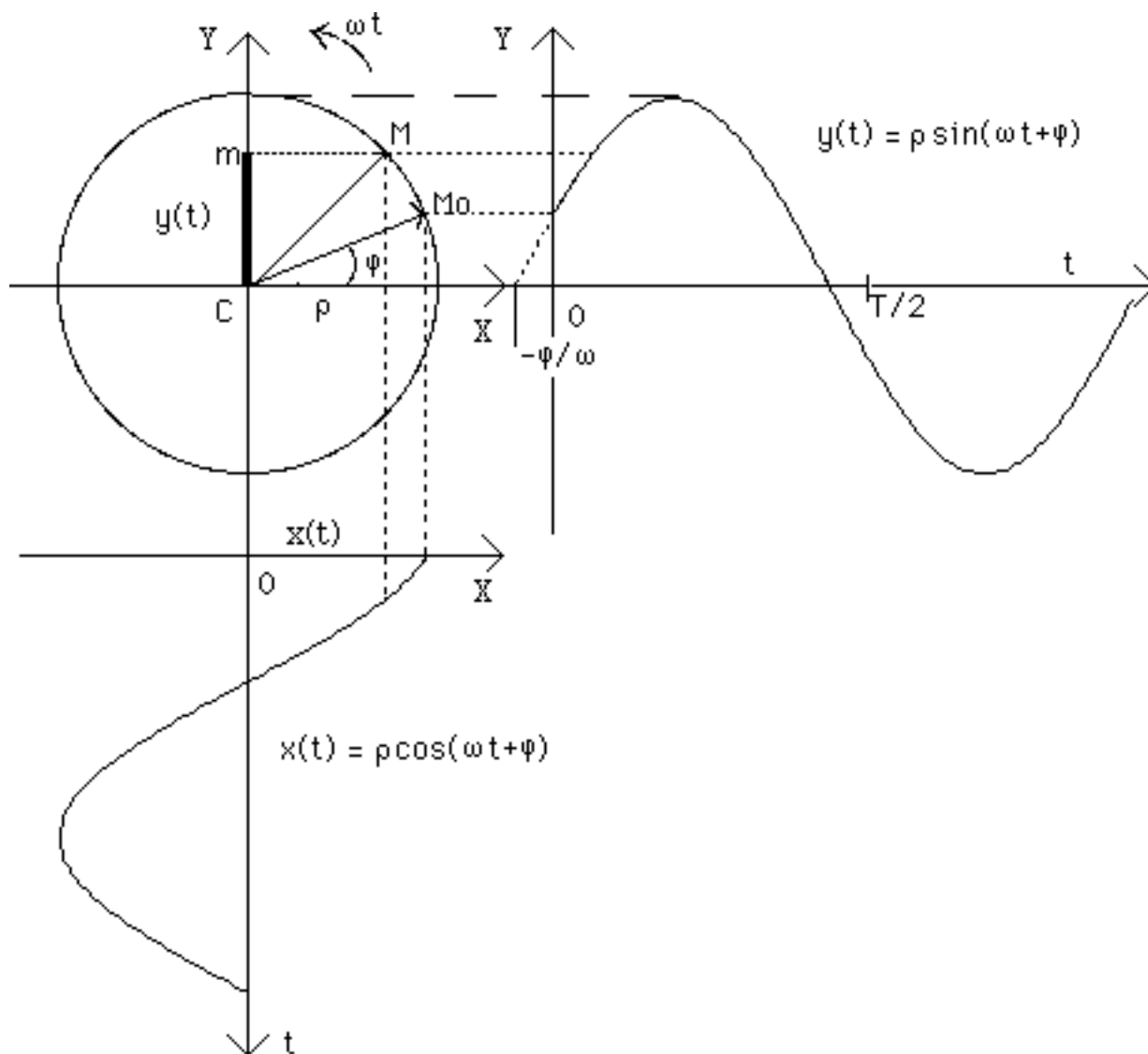
$$U \cos(\omega t + \varphi) = \text{Proj}(\dot{U})_{/OX} = \text{Re}(\underline{u}) \quad \text{représentation américaine (utilisée aux USA)}$$

Il convient donc de choisir l'une de ces représentations :



DANS TOUTE LA SUITE, NOUS UTILISERONS LES FONCTIONS EN SINUS

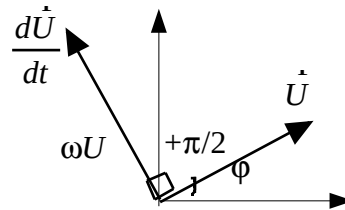
Un fonction en cosinus, par exemple $U \cos(\omega t + \varphi)$, s'écrira donc : $U \sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$.



• **Dérivée** $\Leftrightarrow$ **avance de phase de $\pi/2$** :

R. Analytique : $u(t) = U \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \frac{du}{dt} = \omega U \cos(\omega t + \varphi) = \omega U \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

R. Fresnel :

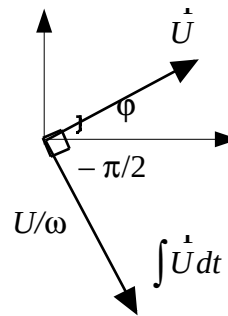


R. Complexe : $\underline{u}(t) = \underline{U} e^{j\omega t} \Rightarrow \frac{d\underline{u}}{dt} = j\omega \underline{U} e^{j\omega t} = j\omega \underline{u}$ avec $j\omega \underline{u} = \omega U e^{j\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$

• **Intégrale** $\Leftrightarrow$ **retard de phase de $\pi/2$** :

R. Analytique : $u(t) = U \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \int u dt = -\frac{U}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) = \frac{U}{\omega} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$

R. Fresnel :



R. Complexe : $\underline{u}(t) = \underline{U} e^{j\omega t} \Rightarrow \int \underline{u} dt = \frac{1}{j\omega} \underline{U} e^{j\omega t} = \frac{\underline{u}}{j\omega}$ avec $\frac{\underline{u}}{j\omega} = \frac{U}{\omega} e^{j\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)}$



Notation de Laplace

- **En régime transitoire** (cf § A14) :

$$pu \Leftrightarrow \frac{du}{dt}$$

$$\frac{u}{p} \Leftrightarrow \int u \cdot dt$$
- **En régime harmonique** :

$$p = j\omega$$